

שדרוג המודלים הגוזרים תחזית התפלגות בשער החליפין

דניאל נתן*

סדרת מאמרים לדיון 2010.01
ינואר 2010

* בנק ישראל <http://www.boi.org.il>

חטיבת המחקר, דניאל נתן – daniel.nathan@boi.org.il, טלפון – 02-6552551
ברצוני להודות לעקיבא אופנבכר, רועי שטיין, ינון גמרסני, אליעזר בורנשטיין, פולינה דובמן, לחברי
סמינר מחלקת המחקר של בנק ישראל וכן למתדיין, בנצי שרייבר על הערותיו.

הדעות המובאות במאמר זה אינן משקפות בהכרח את עמדת בנק ישראל

תקציר

בבנק ישראל משתמשים בשני סוגים של מודלים (פרמטרי וא-פרמטרי) לבניית פונקצית התפלגות לשער העתידי של השקל/דולר. בניית ההתפלגויות מתבססת על פיתוחים תיאורטיים המוכרים בספרות, תוך התאמתם לשוק האופציות המט"חיות הנסחרות בבורסה. על מנת לכייל את המודלים הנ"ל, משתמשים בבנק ישראל במחירי אופציות הנדגמות מספר הפקודות במהלך היום. מטרת נייר זה הינה להציע מתודולוגיה לסינון תצפיות חריגות הנובעות מהדלילות היחסית במסחר של חלק ניכר מהאופציות בשערי המימוש השונים על ידי שימוש בסינון המבוסס על כללי ארביטראז' המקובלים בספרות. סינון זה משפר את יציבות שני המודלים לעומת הסינונים הקיימים כעת בבנק ישראל.

An upgrade of the models used to forecast the distribution of the exchange rate

Daniel Nathan*

Abstract

The Bank of Israel uses two models, one parametric and one non-parametric, to construct a distribution function for the future shekel/dollar exchange rate. The construction of the distribution is based on theoretical developments as described in the literature, adjusted to the market for forex options traded on the Israeli stock exchange. To calibrate the models, the Bank of Israel uses option prices sampled from the order book during the day.

The purpose of this study is to propose a method for filtering out abnormal observations that arise due to the relatively low level of trade in a considerable share of options at the various strike prices using a filter based on the arbitrage rules found in the literature. The method improved the stability of both models in comparison to the filtering methods currently used at the Bank of Israel.

* My thanks to Akiva Offenbacher, Roy Stein, Inon Gamrasni, Eliezer Borenstein, Polina Dovman, the participants in the seminar of the Bank of Israel Research Department and to Dr. Ben Z. Schreiber for his helpful comments.

1. מבוא ומוטיבציה

בנקים מרכזיים רבים¹, כולל בנק ישראל (גלאי ושרייבר 2003, הכט ושטיין 2004, הכט ופומפושקו 2005), משתמשים בפונקצית הצפיפות הניטרלית לסיכון (Risk Neutral Density Function) על מנת לחלץ את ציפיות המשקיעים לגבי שערים עתידיים בשוקי המניות והמט"ח.

על מנת לחלץ את פונקצית הצפיפות, יש צורך בדגימה של חתך רוחבי של מחירי אופציות הנסחרות באותו הזמן על אותו נכס בסיס. מחירים אילו חשופים לטעויות הנובעות בין השאר מכך שהמסחר אינו חסר חיכוכים (friction). טעויות אלה (Bliss and Panigirtzoglou 2002) כוללת:

- (א) טעויות בנתונים – טעויות בקליטת הנתונים או בדיווח המחירים.
- (ב) חוסר סינכרוניות – כתוצאה מהצורך להשתמש בחתך רוחבי של מחירי אופציות גדול ככל שאפשר.

(ג) פרמיית נזילות.

המאמר של Bliss and Panigirtzoglou (2002), ערך השוואה בין השיטות השונות לחילוץ פונקצית הצפיפות על ידי בחינת רגישות השיטות לטעויות בדגימה בעזרת בחינת המומנטים הגבוהים המחולצים מההתפלגות. מהמאמר עולה כי:

- (1) שתי השיטות רגישות לטעויות בדגימה, כאשר ניפוי תצפיות חריגות תורם ליציבות שתי השיטות.
- (2) השיטה הא-פרמטרית הינה הפחות רגישה מבין השתיים.

כיוון שבבנק ישראל משתמשים בשתי השיטות הנ"ל, מטרת הנייר אינה לערוך השוואה בין השיטות אלא לשיפור יציבות שתי השיטות. בנייר אציג מתודולוגיה אשר עקבית עם התיאוריה המקצועית הקיימת בספרות בתחום על מנת לזהות טעות בדגימה ולנפות אותה, ובתוך כך להגדיל את יציבות הפרמטרים הנאמדים בשיטות השונות. בנוסף, על מנת לפתור את בעיית חוסר הסינכרוניות, נשתמש בספר הפקודות ולא בספר העסקאות. יחד עם זאת, צריך לציין כי לא תהיה לנו דרך לזהות את מקור הטעות (טעות הנובעת מפרמיית נזילות או מטעות בקליטה).

מבנה הנייר הוא כדלקמן: בחלק 2 מוצג רקע תיאורטי קצר לתמחור נכסים פיננסיים בכלל ואופציות בפרט. בחלק 3 מוצגת סקירת ספרות בשיטות הקיימות לחילוץ פונקצית הצפיפות בכלל, ובבנק ישראל בפרט והמגבלות האמפיריות הכרוכות בחילוצן. בחלק 4 מוצגים השינויים המוצעים לשיפור היציבות במודלים הקיימים. בחלק 5 מוצגות השוואות שונות בין המודלים הקיימים בבנק ישראל והמודל עם הסינון המוצע ובחלק 6 ישנו סיכום של הנייר.

2. רקע תיאורטי קצר

2.1 תמחור נכסים פיננסיים

נניח כי אנו נמצאים בכלכלה עם N מכשירים פיננסיים שונים (מניות, אגרות חוב וכדומה). בנוסף, נניח כי בכלכלה זו ישנם רק שני נקודות בזמן $t = 0$ ו $t = 1$. מחיר המכשיר ה i בזמן t הוא S_t^i . בזמן $t = 0$,

¹ להלן מספר דוגמאות: בבנק המרכזי של האנגלי - Bahra (1997). בבנק המרכזי של ספרד - Manzano and Sanches (1998). בבנק המרכזי של קנדה - Macmanus (1999). בבנק המרכזי של צרפת - Coutant (1999) ובבנק המרכזי של יפן - Nakamura and Shiratsuka (1999).

S_1^i הוא משתנה אקראי אשר תלוי במרחב המדגם, Ω . לכן, אם הכלכלה מגיעה למצב $\omega \in \Omega$, הערך של המכשיר הפיננסי ה- i בזמן $t = 1$ יהיה $S_1^i(\omega)$.

תיק (Portfolio) הוא וקטור שורה בעל N מימדים $h = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ כך ש- h_i היא כמות היחידות שאנו קונים מ- S_0^i ומחזיקים עד זמן $t = 1$. לכן, אנחנו יכולים להגדיר את ערך התיק שלנו בזמן t כ:

$$V_t^h = \sum_{i=1}^N h_i S_t^i, \quad t = 0, 1 \quad (1)$$

פורטפוליו h נקרא פורטפוליו בעל ארביטראז' אם $V_1^h \geq 0$ ו- $V_0^h \leq 0$ כאשר אחד מהאי-שוויונים הוא חזק. במילים פשוטות, בתיק המאפשר ארביטראז', איננו משלמים כסף מראש ובסוף התקופה אנחנו מרוויחים.

אם אין אפשרות לבנות תיק מסוג זה, אפשר להראות (Harrison and Kreps 1979) שבמרחב מדגם

בדיד $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, קיים וקטור של ערכים חיוביים p_1, p_2, \dots, p_m כך ש:

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1 \quad (2)$$

$$S_0^i = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^m p_j S_1^i(\omega_j) \quad (3)$$

הרקע התיאורטי שתואר לעיל מתאר כלכלה עם שני זמנים ומצבי עולם בדידים. במציאות, הזמן הינו רציף וישנם אינסוף מצבי עולם. במצב כזה, אפשר להראות (Harrison and Pilska 1981) כי כאשר אין אפשרות לבנות תיק ארביטראז', התשואה על הנכסים הפיננסיים שווה לריבית חסרת הסיכון:

$$E\left(\frac{S_T}{S_t} \mid S_t\right) = \int q(S_T) \frac{S_T}{S_t} dS_T = e^{r(T-t)} \quad (4)$$

בדומה לווקטור הערכים במצב הבדיד, במצב הרציף, קיימת פונקציית צפיפות, $q(S_T)$ אשר קרויה ההתפלגות הניטרלית לסיכון (RND), המאפיינת את ההתפתחות העתידית של כל נכס.

2.2 תמחור אופציות

כאשר מדובר על אופציה כלשהי $g(\cdot)$ הנכתבת על נכס בסיס S_T , משוואת התמחור (4) הופכת להיות:

$$E\left(\frac{g(S_T)}{g(S_t)} \mid S_t\right) = \frac{1}{g(S_t)} E(g(S_T) \mid S_t) = e^{r(T-t)} \quad (5)$$

מכאן נובע כי:

$$g(S_t) = e^{-r(T-t)} \int g(S_T) q(S_T) dS_T \quad (6)$$

כלומר, ההתפלגות המאפיינת נכס בסיס כלשהו גלומה בכל אופציה אשר נכתבת על אותו נכס בסיס. בנוסף, ניתן להראות (Breeden and Litzenberger 1978) כי עבור אופציות מכר (ניתן להראות את אותה תוצאה עם אופציות רכש), מתקיימות המשוואות הבאות:

$$\frac{\partial P(S_T, K)}{\partial K} = e^{-rt} \left[\int_0^K q(S_T) dS_T \right] = P\{S_T \leq K\} e^{-rt} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 P(S_T, K)}{\partial K^2} = q(K) \quad (8)$$

כלומר, בנגזרת הראשונה של אופציית מכר לפי שער המימוש גלומה פונקצית הצפיפות המצטברת ובנגזרת השנייה פונקצית הצפיפות עצמה.

2.3 הקשר בין פונקצית הצפיפות לאי קיום אבריטאז' בשוק האופציות

בסעיף 2.1, נאמר כי קיום פונקצית הצפיפות תלוי באי קיום ארביטראז'. על מנת לראות דוגמא לכך בשוק האופציות נבחן אסטרטגיה אחת בשוק האופציות:

מרווח שוקי יורד – נניח כי נסחרים בשוק נכס בסיס, S_t , ואופציות מכר על אותו נכס בסיס בשערי מימוש K_i, K_{i+1} כאשר $K_i < K_{i+1}$. אסטרטגיית מרווח שוק יורד הינה קנייה של אופציית מכר במחיר מימוש K_{i+1} ומכירת אופציית מכר נוספת במחיר מימוש K_i . כיוון שהמרווח המקסימאלי ביום הפקיעה אינו יכול לעלות על $K_{i+1} - K_i$, נובע כי:

$$P(K_{i+1}) - P(K_i) \leq (K_{i+1} - K_i) e^{-rt} \Rightarrow \frac{P(K_{i+1}) - P(K_i)}{(K_{i+1} - K_i)} e^{rt} \leq 1 \quad (9)$$

כאשר בגבול, המשוואה הופכת להיות:

$$\lim_{K_{i+1} \rightarrow K_i} \frac{P(K_{i+1}) - P(K_i)}{(K_{i+1} - K_i)} e^{rt} = \frac{\partial P(K)}{\partial K} e^{rt} = \int_0^K q(S_T) dS_T = P\{S_T \leq K\} \leq 1 \quad (10)$$

כאשר השוויון השני נובע ממשוואה 7. במילים אחרות, אם היה ניתן לבנות תיק ארביטראז' בעזרת אסטרטגיית מרווח עולה, פונקצית ההתפלגות המצטברת לא הייתה מוגדרת כלל וכלל כיוון שערכה אינה יכול לעלות על אחד. המשמעות המעשית של כך היא כי הפרטים לא יתמחרו אופציות על פי ההתפלגות הניטרלית לסיכון אם יש אפשרות לארביטראז'.

3. חילוף ההתפלגויות – סקירת ספרות

3.1 השיטות הקיימות בספרות

קיימות חמש שיטות² עיקריות לחילוף פונקצית הצפיפות הניטרלית לסיכון: שיטות תהליכים סטוכסטיים, עצים בינומיים, שיטות פרמטריות לקירוב פונקצית הצפיפות, שיטות הפרשים סופיים (finite difference) ושיטות החלקה של סטיית התקן הגלומה. נייר זה יתמקד בשתי השיטות הפופולאריות ביותר עלי ידי בנקים מרכזיים: קירוב פונקצית צפיפות על ידי פונקציה דו-לוגנורמלית – שיטה פרמטרית, והחלקה של סטיות התקן הגלומות ממחירי אופציות – שיטה א-פרמטרית.

² להרחבה על השיטות השונות ראה (Jackwerth (1999).

בשיטה הפרמטרית ניתן להניח כי ההתפלגות הינה דו-לוגנורמלית³, ועל ידי הגדרת בעיית מינימיזציה (בין המחיר התיאורטי של האופציה למחיר בפועל), מחלצים את הפרמטרים המאפיינים את ההתפלגות (שתי תוחלות, שתי סטיות תקן, והמשקל בין שני המצבים). השיטה הא-פרמטרית לעומתה אינה מניחה דבר לגבי צורת ההתפלגות והיא גוזרת את המחירים לפי שערי מימוש ועל ידי כך מחלצים את צורת ההתפלגות. לשתי השיטות יש בעיות אמפיריות משותפות הקשורות לעובדה כי על מנת לחלץ את ההתפלגות, ישנו צורך בחתך רוחבי של אופציות הנסחרות בו-זמנית שכן אם לא, הן לא ישקפו את אותו המידע.

3.2 שיטות הסינון הקיימות כעת בבנק ישראל

שוק האופציות הנסחרות בבורסה אינו מאופיין בסחירות שמאפשרת דגימת מספר רב של עסקאות שהתבצעו סביב נקודת זמן מסוימת על מנת שנוכל לבנות את ההתפלגות. פיתרון אפשרי לחוסר הסינכרוניות הוא להשתמש בספר הפקודות בבורסה ולהניח כי המחיר "האמיתי" בשוק מבוסס על ממוצע מחירי ההיצע והביקוש הטובים ביותר. השימוש בספר הפקודות אומנם פותר את בעיית חוסר הסינכרוניות אך גם גישה זו סובלת מבעיות אמפיריות שכן ישנן אופציות ללא ציטוט במחיר סביר. בעיות אלו באות לידי ביטוי במרווח בין מחיר ההיצע ומחיר הביקוש המשקף מדד הפוך למובהקותו של הממוצע כמדד למחיר "האמיתי" בשוק ועשוי לשקף מחיר שוק שלא משקף את המחיר ההוגן⁴. עקב כך, לא ברור עד כמה ניתן לסמוך על הפרמטרים הנאמדים במודל. בנוסף, מחירים ממוצעים אלו יכולים לגרום לחוסר יציבות לאורך זמן בפרמטרים הנאמדים.

בבנק ישראל קיימות שתי שיטות על מנת לסנן תצפיות חריגות הנובעות מהבעיות אשר הוזכרו בסעיף הקודם:

סינון לפי סטיות תקן גלומות – בסינון לפי סטיות תקן גלומות, הוחלט לסנן אופציות עם סטיית תקן גלומה הקטנה מ-2% וגדולה מ-20%. שיטה זו אינה מסננת בצורה יעילה כאשר היא חשופה גם לטעויות מסוג ראשון, סינון אופציות קבילות לחלוטין כתוצאה מתקופות בהן סטיות התקן גבוהות במיוחד, וגם לטעויות מסוג שני כאשר כל אופציה עם סטיית תקן גלומה בטווח הנ"ל אינה מסוננת למרות שהיא עדיין עשויה להיות תצפית חריגה. עקב כך, בהכט ופומפושקו (2005) הוחלט לערוך שקלול על פי מחזוריים על מנת להתמודד עם הבעיות הנ"ל (המודל החדש נקרא RND במאמר).

משקלות לפי מחזוריים – שקלול בעזרת מחזורי מסחר, מחושב כך שכל אופציה מקבלת משקל על פי סך המחזור שנסחר בה בפועל באותו יום עד לזמן הדגימה, ביחס לסך המחזור באותו יום, עד לזמן הדגימה, של כל האופציות. לפי שיטה זו, אופציות שנסחרו במחזור משמעותי ביחס למחזור היומי זוכות למשקל גדול יותר מאופציות שנסחרו במחזוריים קטנים. זאת מתוך ההנחה שמחזור מסחר הינו מאפיין משמעותי של יעילות השוק ולכן, האומדן למחיר אופציה בעלת מחזור גדול יותר באופן יחסי, ישקף באופן נאמן יותר את המחיר האמיתי של האופציה, ויאפשר גזירת התפלגות שערי חליפין עתידיים מדויקת יותר

³ או אף מעבר לזאת כגון תלת-לוג-נורמל – הנחה פחות מגבילה אבל מצמצמת את דרגות החופש כנעשה לדוגמה בהכט ופומפושקו (2005).

⁴ מחיר הוגן הינו מחיר אשר אינו מאפשר רווחי ארביטראז'.

ויציבה יותר. אומנם השיטה אינה מוגדרת כסינון, אך אפקטיבית היא מסננת אופציות מסוימות אשר בעלות מחזור אפסי יחסית לאופציות אחרות. החולשה של השיטה הנ"ל מתבטאת בכך כי גזירת ההתפלגות וסטיות התקן מבוססת על נתוני אופציות המתאימים לנקודת זמן אחת משותפת, המשקפת את מצב השוק והציפיות השונות בשוק בדיוק באותה נקודת זמן. לעומת זאת, מחזורי המסחר אשר משמשים לקביעת המשקולות, מורכבים מנתון שמצטבר במהלך כל יום המסחר ולכן אינם משקפים את המצב בשוק בנקודת הזמן של דגימת הנתונים. הא-סימטריה בעדכניות הנתונים גורמת במקרים מסוימים להטיה במשקולות שמקבלות התצפיות. לדוגמה, אופציה שבתחילת יום המסחר הייתה קרובה לכסף, ולכן נסחרה במחזור גדול במהלך היום יכולה להתרחק מהכסף⁵ כתוצאה משינוי בשער החליפין לפני זמן דגימת הנתונים ובתוך כך יקטנו מחזורי המסחר משמעותית. בזמן דגימת הנתונים מחירי האופציות יאופיינו, בגלל המסחר הדליל, במהימנות נמוכה ביחס למחיר האמיתי של האופציה, וביחס למידע על ציפיות המשקיעים הגלום במחיר האופציה אולם המשקל שהאופציה תקבל יהיה כאילו מחירי האופציה שנדגמו משקפים מהימנות גבוהה.

4. המתודולוגיה המוצעת לסינון תצפיות חריגות

הסינון המוצע מתבסס, כאמור, על הגדרת מחיר הוגן הנקבע על פי כללי ארביטראז'⁶. בעולם בו נסחרות אופציות (רכש ומכר) במקביל למסחר בנכס הבסיס, לא יוצרו רווחי ארביטראז' רק אם יתקיימו הכללים הבאים⁷:

- (א) מחיר האופציה יהיה גדול יותר מהערך הפנימי⁸ של האופציה.
 - (ב) מחירי האופציות הינם מונוטוניות עולות/יורדות על פני שערי המימוש השונים.
 - (ג) הפרש המחירים בין כל שני אופציות מאותו סוג (רכש או מכר) יהיה קטן מהפרש שערי המימוש שלהם.
 - (ד) עלות אסטרטגיית פרפר תהיה חיובית.
 - (ה) סטיית התקן הגלומה בין כל שני זוגות אופציות (מכר ורכש) בעלות מחיר מימוש דומה צריכות להיות שוות (משוואת ה-Put-Call Parity), עד כדי סטייה של כ-2 אחוזים⁹.
- התנאים לעיל מהווים אסטרטגיות אשר ניתן לבנות בשוק, כאשר הפרה באחד מן התנאים משמעותה כי הם מניבים רווח ללא סיכון. תנאי א' הינו היחיד שבדוק כל אופציה באופן נפרד מהאופציות האחרות ולמעשה מסנן את האופציות המתומחרות בחסר. שאר התנאים, המשלבים מספר אופציות בתהליך הבדיקה (לדוגמה, בתנאי מספר ד' נבדקות 3 אופציות בשערי מימוש שונים), נועדו לסנן אופציות המתומחרות ביתר. לכן, ניתן לקבוע כי אם תנאים אלו מופרים, זה יהיה כתוצאה מתמחור יתר ולא להיפך, והסינון יתבצע על האופציות המתומחרות ביתר (כלומר האופציה בעלת הערך הכספי הגבוה

⁵ אופציה בכסף הינה אופציה אשר אם תאריך הפקיעה שלה היה היום, היא הייתה מניבה רווח לקונה האופציה.
⁶ גישה דומה משמשת את הבנק המרכזי של אנגליה. ראו Notes on the Bank of England Option-Implied Probability Density Functions.

⁷ למעשה, ניתן למצוא עוד כללים. ראה לדוגמה Merton (1973). אך Carr and Madan (2005) מספקים את מספר התנאים המינימאלי.

⁸ ערך פנימי הינו הסכום שבעל האופציה היה מקבל כיום לו היה יכול לממש את האופציה.
⁹ תיאורטית, אמור להיות שוויון אם מתעלמים מעומק השוק ועלויות עסקה.

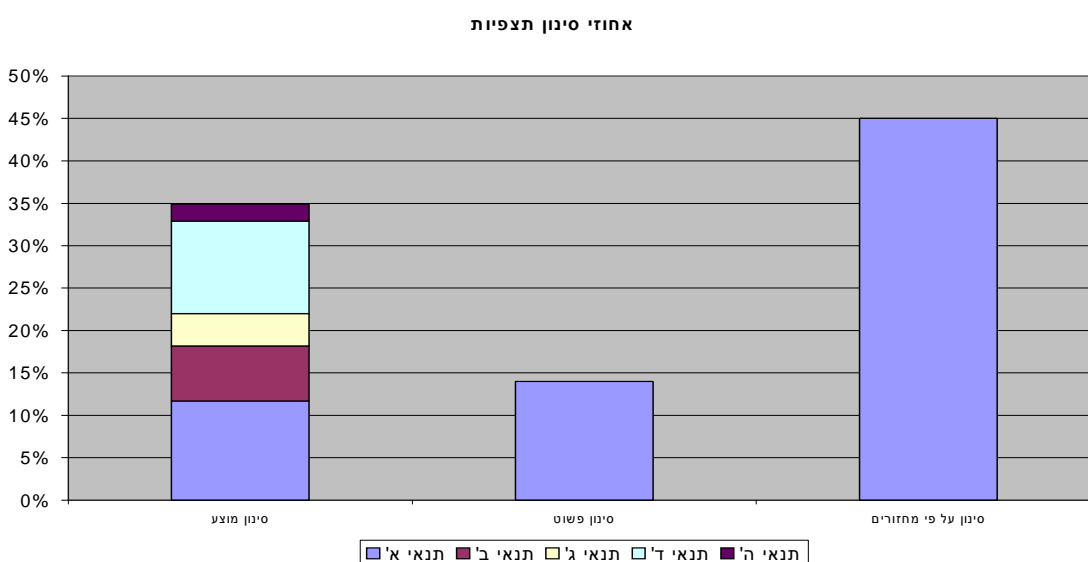
ביותר אשר תרמה לרווחה באסטרטגיה). אציין עוד כי תנאי ה' הינו חריג בכך שלא ניתן לקבוע איזו אופציה "אשמה" בארביטראז' כיוון שהוא מערב שני אופציות מסוגים שונים. על כן, במקרה זה, שני האופציות יסוננו¹⁰.

היתרון העיקרי של סינון על פי כללי אריטבראז' טמון בעובדה כי הפרטים מתמחרים אופציות על פי ההסתברות הניטרלית לסיכון רק בתנאי שלא ניתן לבנות תיק אשר מאפשר ארביטראז' (ראה חלק 2). לכן, יתכן וקיימת בעיה תיאורטית בסינונים אחרים (וכתוצאה מכך בפרמטרים אשר מתקבלים מהמודלים) אשר אינם מסננים אופציות אשר מאפשרות ארביטראז'.

4.1 אחוז התצפיות המסוננות

הטבלה הבאה מציגה את אחוזי הסינון בשיטות השונות¹¹ כאשר בסינון המוצע ישנה חלוקה לפי תנאים:

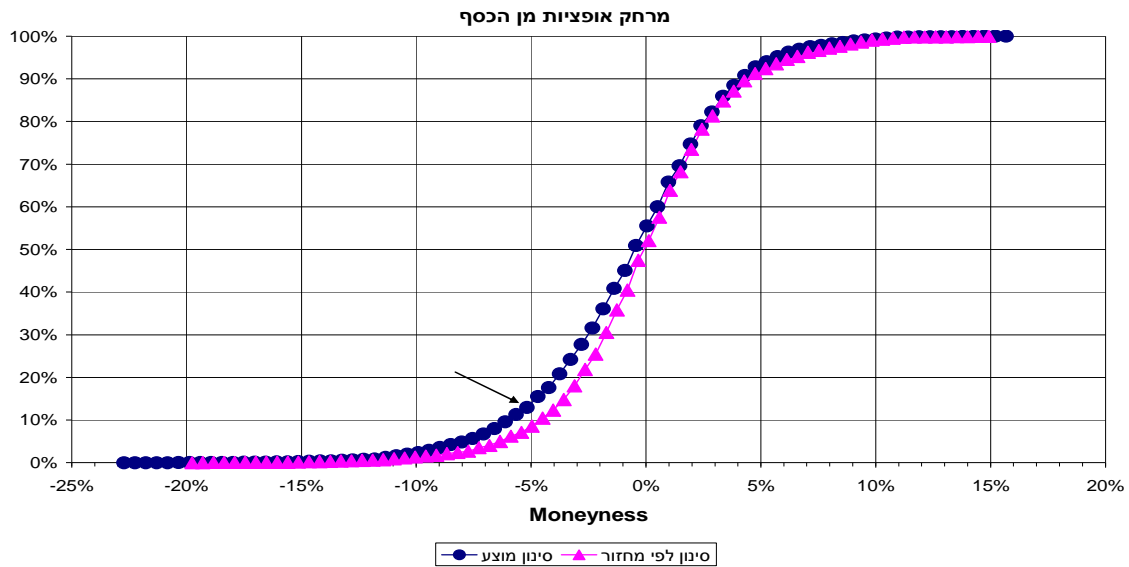
איור 2 – השוואת אחוז התצפיות אשר מסונן בשיטות השונות



ניתן לראות באיור 2 כי בסינון המוצע, 35% מהתצפיות מסוננות¹² מול כ-14% בסינון הפשוט (מתחת ל-2% מעל 20%) ו-45% בשקלול על פי מחזורים. יתכן כי הכמות היחסית קטנה של האופציות המסוננות בסינון הפשוט נובעת מטעויות מסוג שני – אי סינון אופציות אשר משקפות מחירים לא הוגנים. בנוסף, הכמות הגבוהה יחסית של אופציות אשר מסוננות בסינון על פי מחזור נובעת מטעויות מסוג ראשון. הסיבה לכך היא כי רוב המחזור מתרכז סביב אופציות סביב הכסף ולכן באופן סיסטמי, אופציות עמוק בתוך הכסף או רחוק מן הכסף מסוננות למרות כי יתכן והן משקפות מחירים הוגנים. הגרף הבא ממחיש נקודה זו ומציג את פונקציית הצפיפות המצטברת של האופציות אשר עוברות את הסינון לפי שקלול על פי מחזור ולפי כללי ארביטראז', כאשר האופציות מאופיינות על פי המרחק שלהם מן הכסף¹³ (Moneyness).

¹⁰ על פי הספרות המקצועית, ארבעת התנאים הראשונים אשר בוחנים רווחי ארביטראז' בשילוב של אופציות מאותו הסוג (מכר או רכש) אינם מצליחים לבטל קיום של רווחי ארביטראז' באסטרטגיה זו ועל כן מומלץ להפעיל גם סינון זה.
¹¹ אופציה קוטלגה כמסוננת על פי שקלול על פי מחזורים אם חלקה היחסי במחזור הינו קטן מעשירית האחוז.
¹² נציין כי בממוצע נלקחות כ-31 תצפיות.
¹³ החישוב הינו הלוגריתם הטבעי של שער הפורוורד מחולק במחיר המימוש.

איור 3 – פונקציית צפיפות מצטברת אמפירית



מאיור 3 עולה כי בסינון לפי כללי ארביטראז', אחוז גבוה יותר של אופציות אשר רחוקות יותר מן הכסף אינו מסונן מאשר בשקלול על פי מחזור. לדוגמה, כאשר המרחק מן הכסף הינו 5%- ומטה, אחוז האופציות אשר אינו מסונן הינו גבוה יותר.

5. בדיקת והשוואת יציבות הפרמטרים בשיטות השונות

שוק האופציות הנסחרות בבורסה אינו מאופיין בסחירות גבוהה ולעיתים מחירי האופציות הנדגמים לצורך אמידת ההתפלגויות אינם משקפים מחירי שוק. על כן, כמו בכל מחקר אמפירי, ישנו צורך בניפוי תצפיות חריגות מהמדגם ועל ידי כך סטיית התקן של המודל הנאמד קטנה, דבר אשר משפר את התוצאות המתקבלות מהאמידה. על כן, ניפוי נכון של תצפיות חריגות אמור לתרום ליציבות התוצאות ובכך מידת הרעש הלבן תקטן ומקדם המתאם העצמי יגדל בהתאם. (Bliss and Panigirzoglou, 2002), ערכו השוואה בין שיטות שונות לאמידת ההתפלגות על ידי בחינת רגישות השיטות לטעויות בדגימה בעזרת בחינת השונות של המומנטים הגבוהים. לכן, במסגרת בחינת הסינון המוצע בעבודה זו נבחן את הסדרה העתית של ההסתברות לפיחות וההסתברות לייסוף הן בשיטה הפרמטרית והן בשיטה הא-פרמטרית¹⁴.

להלן המודלים העומדים למבחן:

א. מודל פרמטרי (דו-לוג נורמל):

א.1. סינון מוצע.

א.2. סינון פשוט (מתחת ל-2% מעל 20%).

ב. מודל פרמטרי – שיטת RND עם שקלול לפי מחזורים.

ג. מודל א-פרמטרי:

ג.1. סינון מוצע.

ג.2. סינון פשוט.

¹⁴ כיוון שלא ניתן לחלק מהמודל הא-פרמטרי את המומנטים של ההתפלגות בחרתי לערוך את ההשוואה בין כל השיטות על הסתברויות לייסוף/פיחות בנס הבסיס

5.1 בחינת השונות של הפרמטרים

בחלק זה נבחן סטטיסטית את ההבדלים בין השונות של השינויים היומיים בהסתברות לייסוף חריג וההסתברות לפיחות חריג במודלים השונים, כאשר תקופת המדגם לצורך ההשוואה הינה שנת 2008¹⁵; תקופה אשר אופיינה בתנודתיות גבוהה, הן בארץ והן בעולם, על רקע המשבר הפיננסי בעולם. על כן, החשיבות לגזירת מידע אמין ומדויק על בסיס נתוני המסחר באופציות שקל/דולר הינה גבוהה במיוחד. הנחת המחקר העומדת מאחורי ההשוואות היא כי שיטה עמידה יותר הינה פחות תנודתית. הסיבה לכך היא כפולה: (1) ניפוי התצפיות החריגות תורם ליציבות המומנטים הנאמדים, כפי שהוזכר בסעיף הקודם. (2) הסדרה העתית של התנודתיות במחירים הינה בעלת זיכרון ארוך (Long Memory). תכונה זאת קרויה בספרות האמפירית¹⁶ תנודתיות "בצרורות" (Volatility Clustering). כלומר, שינויים גדולים במחיר מלווים בשינויים גדולים בתקופה הבאה. לכן, נצפה לראות כי הסדרה העתית תהיה הן יציבה יותר והן תראה דעיכה איטית יותר. מבחן סטטיסטי הבוחן את שונות האומדנים המתקבלים מההתפלגויות על פני תקופת המדגם בשיטות השונות יצביע על השיטה העמידה ביותר אשר היא תניב מידע אינפורמטיבי (הקטנת עוצמת הפילים הלבנים). להלן תוצאות המבחן¹⁷ לשיטות השונות שהוגדרו לעיל:

לוח 1 – בחינת יציבות הפרמטרים בשיטות השונות

התנודתיות בשינוי בהסתברות לייסוף מעל 3%	התנודתיות בשינוי בהסתברות לייסוף מעל 3%	
0.022	0.021	א.1. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
0.088 (p<0.01)	0.044 (p<0.01)	א.2. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
0.032 (p<0.01)	0.038 (p<0.01)	ב. התפלגות RND – סינון פשוט ושקלול התצפיות לפי מחזור
0.023	0.027	ג.1. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
0.033 (p=0.37)	0.044 (p<0.01)	ג.2. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

אפשר לראות בלוח 1 לעיל כי סטיית התקן הנמוכה ביותר מתקבלת על פי שיטת הסינון המוצע הן במודל הפרמטרי והן במודל הא-פרמטרי. אציין כי הבדלים אלו מובהקים למעט במקרה אחד; שונות השינויים

¹⁵ בתקופה זו ישנן 230 תצפיות.

¹⁶ ראה לדוגמה (Ding, Granger and Engle (1993). לסקירה ארוכה יותר ראה (Cont (2001).

¹⁷ המבחן הסטטיסטי שערכתי הינו Modified Levene Test (Brown-Forsythe). השערת המחקר היא כי שונות ההסתברות לפיחות/ייסוף של השיטה הפרמטרית בסינון המוצע נמוכה מן השונות בסינון הפשוט ושיטת ה RND. כמו כן, נעשתה אותה בדיקה בנפרד עבור השיטה הא-פרמטרית בסינון המוצע מול השיטה הא-פרמטרית בסינון הפשוט. בדיקת ההשערות נערכה בזוגות מול השיטה המוצעת.

היומיים במודל הא-פרמטרי בשיטת הסינון הפשוט אינה גבוהה מזו המיישמת את הסינון המוצע. על כן עמידותו של המודל המיישם את שיטת הסינון המוצע גדולה יותר והאינפורמציה המתקבלת נקייה יותר.

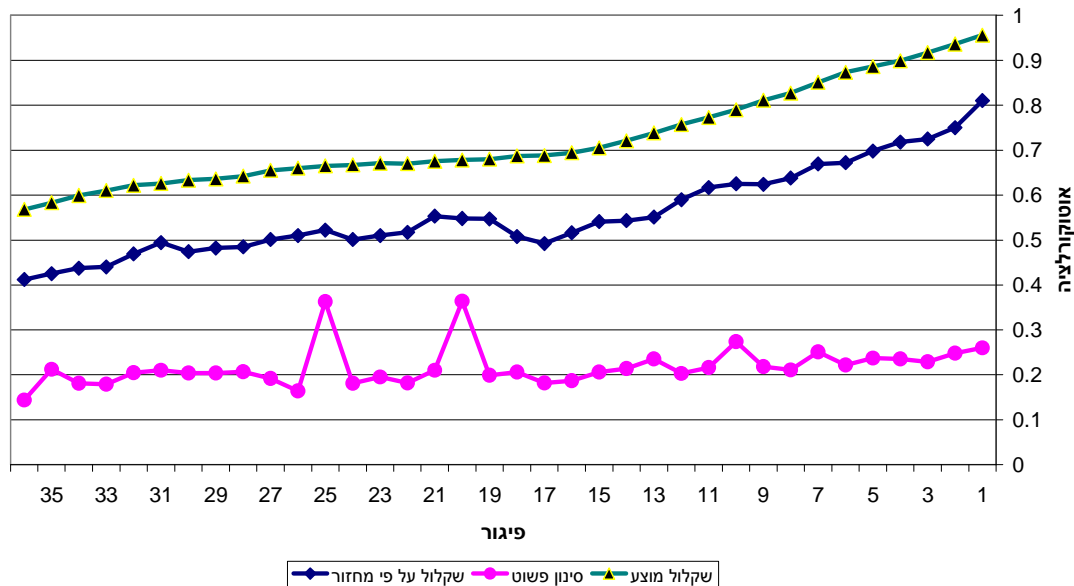
5.2 בחינת מידת ההחלקה של הנתונים

כאשר בוחנים את ההתפתחות של הפרמטרים העיקריים של ההתפלגות על פני תקופת המדגם (איור 6 ואיור 10 בעמוד 12 ו 13 בהתאמה), ניתן לראות כי מגמות בהתפתחות משתקפות ביתר בהירות במודלים המתחשבים בסינון המוצע; למשל, העלייה בסטיית התקן ובסיכונים לפיחות וייסוף חריג שהחלה באמצע 2007.

על מנת לבחון זאת אמפירית, אציג בחלק זה את גרף האוטוקורלציה (Correlogram). גרף זה מציג את ערך האוטוקורלציה בפיגורים שונים כאשר סדרה עתית עם מגמות ארוכות טווח תראה דעיכה איטית יותר וערכים חיוביים גבוהים יותר.

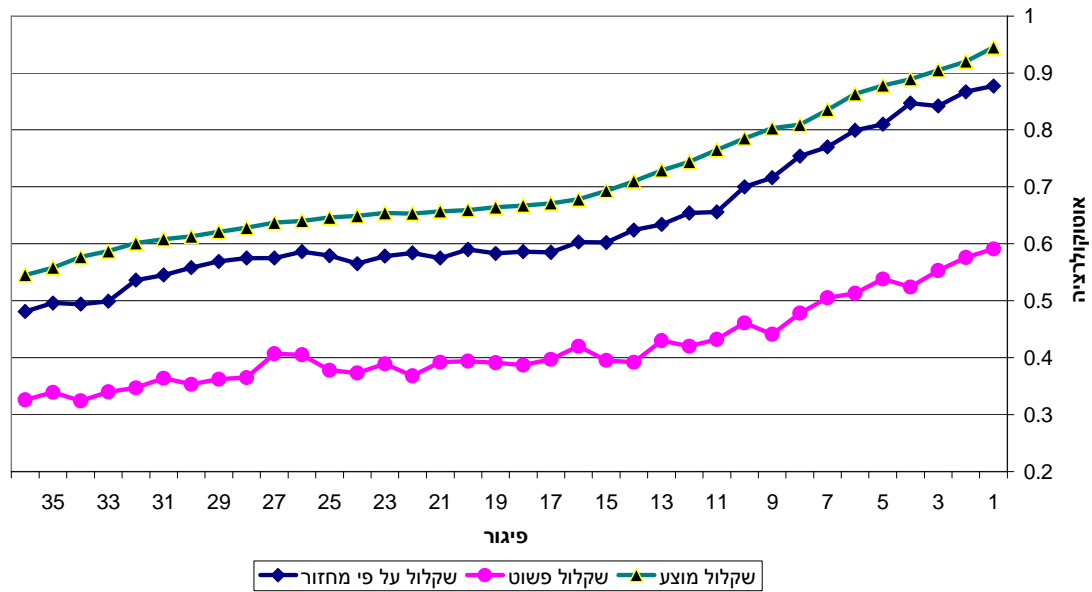
איור 4

אוטוקורלציה בהסתברות לייסוף חריג מעל 3%



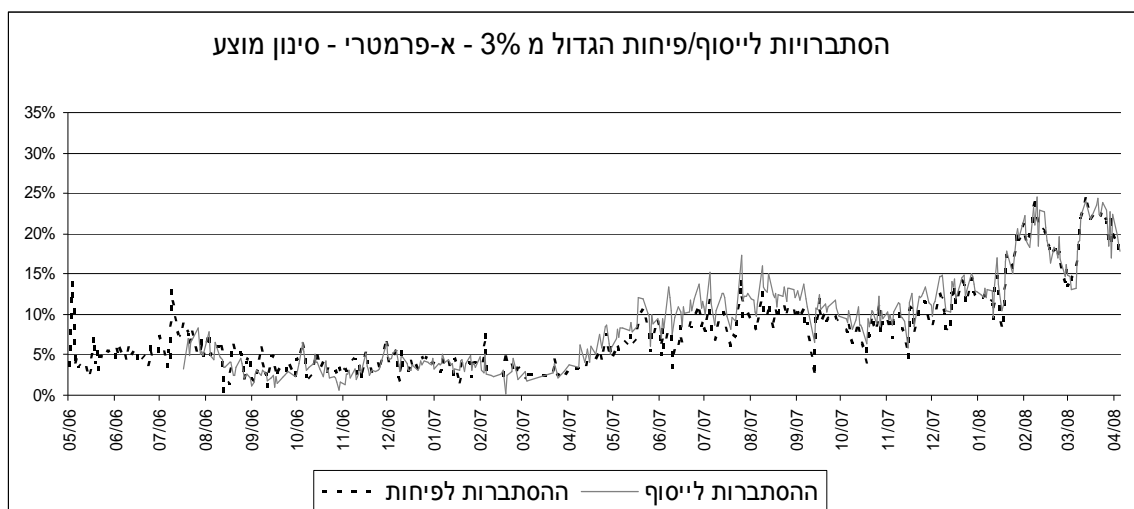
איור 5

אוטוקורלציה בהסתברות לפיחות חריג מעל 3%

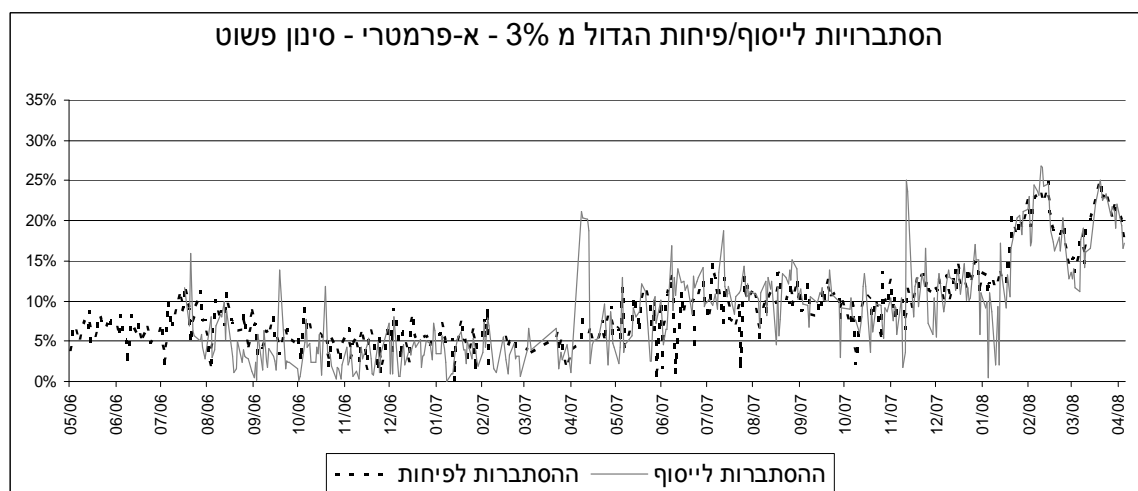


מאיור 4 ו 5 לעיל, עולה כי הדעיכה האיטית ביותר ובעלת ערכי אוטוקורלציה גבוהים לכל פיגור הינם בסינון המוצע. שני העמודים הבאים מציגים את הסדרות העתיות של ההסתברויות לפיחות/ייסוף חריג וסטיית התקן הגלומה בשיטות השונות בתקופת המדגם וניתן מהם להתרשם כי ניתן להעריך את התפתחות האומדנים ביתר קלות וברמת ביטחון גבוהה יחסית באיורים 7 ו-10, המציגים את תוצאות המודלים (פרמטרי וא-פרמטרי) בשיטת הסינון המוצעת בעבודה זו.

איור 9



איור 10



5.3. בדיקה והשוואת ההתפלגויות בשלושה ימי מסחר נבחרים

בחלק זה נבחן בשלושה ימי מסחר עד כמה שונות צורות ההתפלגות המתקבלות על פי השיטות השונות ונראה גראפית כי שתי השיטות הנאמדות בעזרת הסינון המוצע בנייר זה מחלצות מידע מהימן יותר. נבחרו שלושה תאריכים אשר ממחישים נקודה זו: 14.06.06, 12.08.07 ו-21.01.08.

לוח 2 – פרמטרים הנאמדים בשיטות השונות - 14.06.06

הסתברות לפיחות מעל 3 אחוזים	הסתברות לייסוף מעל 3 אחוזים	סטיית תקן	
3%	2%	5.9%	א.1. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
4.5%	4.5%	6.6%	א.2. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
3%	2%	6.5%	ב. התפלגות RND – סינון פשוט ושקלול התצפיות לפי מחזור
3%	3%	-	ג.1. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
8.4%	-	-	ג.2. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

לוח 3 - פרמטרים הנאמדים בשיטות השונות - 12.08.07

הסתברות לפיחות מעל 3 אחוזים	הסתברות לייסוף מעל 3 אחוזים	סטיית תקן	
7%	8%	8.4%	א.1. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
7%	2%	10%	א.2. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
3%	3%	10%	ב. התפלגות RND – סינון פשוט ושקלול התצפיות לפי מחזור
10%	10%	-	ג.1. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
12%	10%	-	ג.2. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

לוח 4 - פרמטרים הנאמדים בשיטות השונות - 21.01.08

הסתברות לפיחות מעל 3 אחוזים	הסתברות לייסוף מעל 3 אחוזים	סטיית תקן	
12%	13%	9%	1.א. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
2%	4%	10%	2.א. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
4%	8%	11%	ב. התפלגות RND – סינון פשוט ושקלול התצפיות לפי מחזור
14%	13%	-	1.ג. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
15%	13%	-	2.ג. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

אחד הדברים הבולטים מהנתונים הנ"ל הוא השוני הגדול בין השיטות השונות בהסתברויות שחולצו. אפשר לראות כי יש הבדל גדול בין הערכים של השיטה הפרמטרית בסינון הפשוט, שיטת RND והשיטה הא-פרמטרית בסינון הפשוט. לעומת זאת, בסינון המוצע, אין הבדל כה גדול בין הערכים המתקבלים בשתי השיטות – פרמטרי וא-פרמטרי. עובדה זאת מחזקת את האמינות לסינון המוצע.

6. מסקנות

מטרת הנייר הינה להציע מתודולוגיה אשר מסתמכת על כללי ארביטראז' לסינון תצפיות חריגות הנובעות מטעויות בדגימת מחירי אופציות הנובעות משימוש בספר הפקודות, על מנת שיהיה ניתן לגזור פרמטרים אמינים יותר לתחזית ההתפלגות של שער השקל/דולר כפי שגלומים במחירי האופציות בבורסה. אפשר לראות כי ישום ההמלצות בנייר זה מוסיף ליציבות הפרמטרים לאורך זמן, דבר המתבטא בתנודתיות נמוכה יותר של השינויים, דבר המאפשר לעקוב ביתר קלות אחר מגמות בסיכוני המט"ח. בנוסף, היתרון בסינון המוצע על פני שיטות הסינון הקיימות בבנק ישראל הינו בכך שהסינון מסתמך על יסודות תיאורטיים של תנאי רווחי ארביטראז' ואינו מוגדר אד הוק.

ביבליוגרפיה

- גלאי, דן וב. שרייבר (2003). "האינפורמציה הגלומה באסטרטגיות ובאופציות שקל/דולר הנסחרות בשוק מעבר לדלפק (OTC) בישראל", סדרת מאמרים לדיון – סוגיות במטבע חוץ, בנק ישראל. הכט, י. וה. פומפושקו, (2005). "RND", סדרת מאמרים לדיון – עיונים מוניטריים, בנק ישראל. שטיין, ר. וי. הכט, (2004). "אמידת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר הגלומה במחירי האופציות", הרבעון לכלכלה.
- שטיין, ר. (2005). "ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר", סוגיות בבנקאות 17.
- Bahra, B. (1997). "Implied Risk-Neutral Probability Density Functions From Option Prices: Theory and Application", Bank of England Working Paper, No 66.
- Bliss, R. and N. Panigirtzoglou (2002). "Testing the Stability of Implied Probability Density Functions", *Journal of Banking and Finance* 26 (2-3), 381-422.
- Carr, P. and M. Dilip (2005). "A Note on Sufficient Conditions for No Arbitrage" *Finance Research Letters*, 2 (3), 125-130.
- Cont, R. (2001). "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues", *Quantitative Finance* 1, 223-236.
- Coutant, S. (1999). "Implied Risk Aversion in Option Prices", Banque de France Working Paper.
- Harrison, J. M. and D. Kreps (1979). "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.
- Harrison, J. M. and S. Pliska (1981). "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications* 11, 215-260.
- Jackwerth, J. (1999). "Option Implied Risk-Neutral Distributions and Implied Binomial Trees: A Literature Review", *Journal of Derivatives*, 7 (2) 66-82.
- Manzano, C. and I. Sanchez (1998). "Indicators of Short-Term Interest Rate Expectations: The information Contained in the Options Market", Documento de Trabajo 9816, Servicio de Estudios, Banco de Espana.
- Merton, R. (1973). "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1), 141-183.
- Nakamura, H. and S. Shiratsuka (1999). "Extracting Market Expectations from Option Prices", Working paper, Bank of Japan.